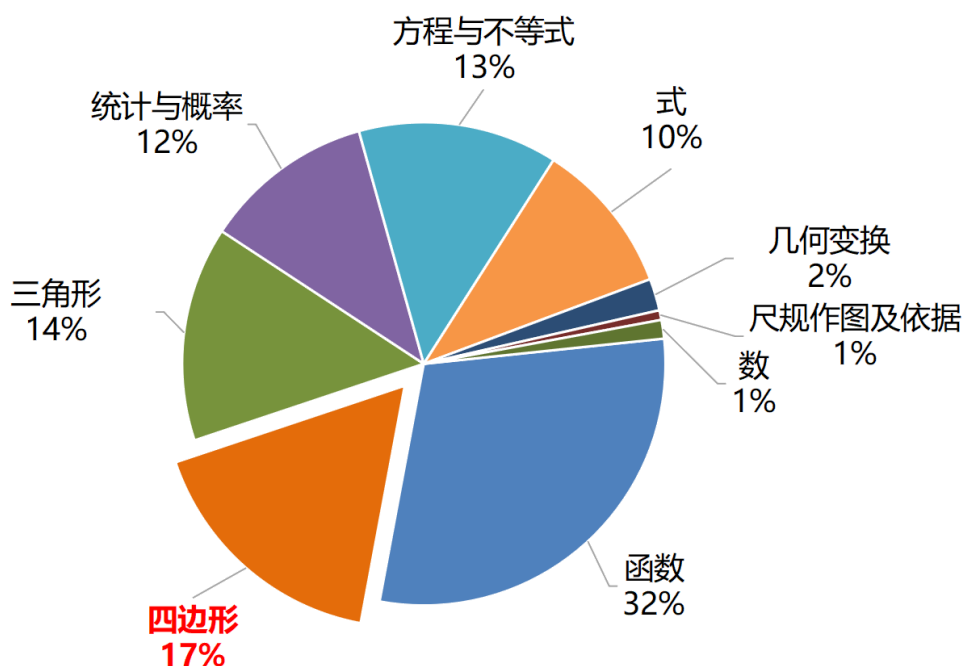


# 第1讲 平行四边形

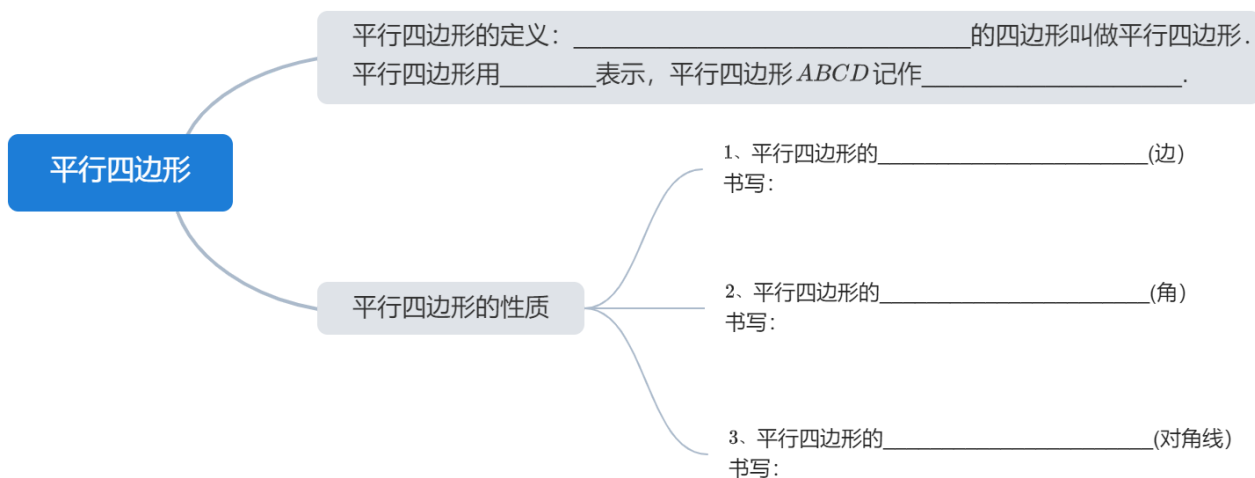
平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《平行四边形》，旨在帮助学生了解并熟练掌握平行四边形及特殊四边形的性质与判定，为后续模块奠定基础。

本模块难度中等，适应于平行四边形与特殊平行四边形性质、判定的基础认知与短期突破，本模块分为平行四边形、矩形与菱形、正方形3讲内容，帮助学生了解平行四边形这部分常见题型，掌握平行四边形的解题思路。



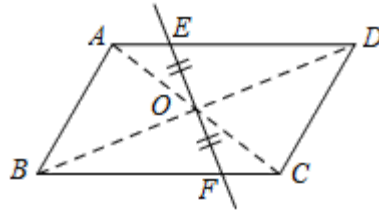


## 一、 平行四边形的性质

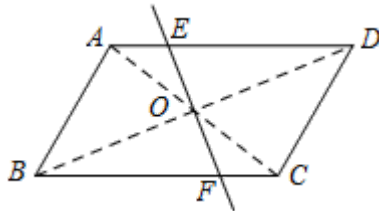


### 重要结论：

(1) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点，则这条直线被一组对边截得的线段以对角线的交点为中点。如图，直线  $EF$  经过平行四边形对角线的交点  $O$ ，分别交一组对边于  $E$ 、 $F$ 。即\_\_\_\_\_。



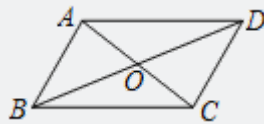
(2) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点，则这条直线平分平行四边形的\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。如图，直线 $EF$ 经过平行四边形对角线的交点 $O$ ，分别交一组对边于 $E$ 、 $F$ 。即 $EF$ 平分平行四边形的\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_。



### 【教法备注】

1、平行四边形的定义：两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形。

平行四边形 $ABCD$

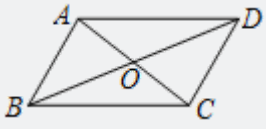


平行四边形用“ $\square$ ”表示，平行四边形 $ABCD$ 记作“ $\square ABCD$ ”。

注意：

- ①对边：四边形中不相邻的边，也就是没有公共顶点的边叫做对边。
- ②对角：四边形中没有公共边的两个角，也就是说对着的两个角叫做对角。
- ③平行四边形的表示要按照一定的方向依次表示各个顶点。可以按照顺时针方向排列字母顺序，也可按照逆时针方向排列字母顺序，但是不能打乱顺序。

2、平行四边形性质：

| 图形                                                                                                | 性质  |                          | 符号表示                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 平行四边形 $ABCD$<br> | 边   | 平行四边形的对边平行<br>平行四边形的对边相等 | $AB \parallel CD, AD \parallel BC$<br>$AB = CD,$<br>$AD = BC$                                    |
|                                                                                                   | 角   | 平行四边形的对角相等<br>邻角互补       | $\angle DAB = \angle BCD,$<br>$\angle ABC = \angle ADC$<br>$\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ |
|                                                                                                   | 对角线 | 平行四边形的对角线互相平分            | $OA = OC = \frac{1}{2}AC,$<br>$OB = OD = \frac{1}{2}BD$                                          |

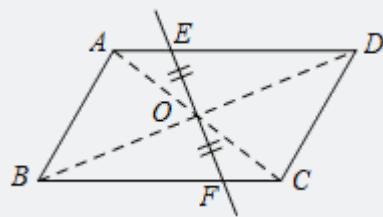
书写： $\because$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形，  
 $\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC,$   
 $AB = CD, AD = BC,$   
 $\angle DAB = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC,$   
 $OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD.$

**注意：**

- ①做题时根据实际需要，只写出需要的性质即可．
- ②平行四边形属于四边形，它具有四边形的性质，平行四边形的内角和 $360^\circ$ ，外角和也是 $360^\circ$ ．

### 3、重要结论：

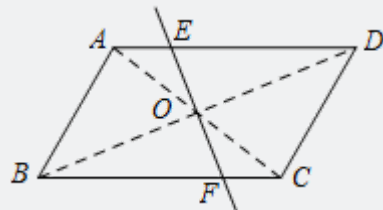
(1) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点，则这条直线被一组对边截得的线段以对角线的交点为中点．如图，直线 $EF$ 经过平行四边形对角线的交点 $O$ ，分别交一组对边于 $E$ 、 $F$ ．即 $OE = OF$ ．  
 通过证明 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$ 即可．



(2) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点，则这条直线平分平行四边形的周长和面积．

如图，直线 $EF$ 经过平行四边形对角线的交点 $O$ ，分别交一组对边于 $E$ 、 $F$ ．

即 $EF$ 平分平行四边形的周长和面积， $C_{\text{四边形}ABFE} = C_{\text{四边形}CDEF}, S_{\text{四边形}ABFE} = S_{\text{四边形}CDEF}.$



【知识点拨】

四边形的知识是三角形知识的延伸，因此，在解决平行四边形相关问题时，既要注意三角形知识和全等三角形的运用，又要善于在平行四边形的背景下思考问题，利用平行四边形的性质为解决问题服务。

1. 若平行四边形中两个内角的度数比为1 : 2，则其中较小的内角是（ ）。

- A.  $90^\circ$                       B.  $60^\circ$                       C.  $120^\circ$                       D.  $45^\circ$

【答案】 B

【解析】  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

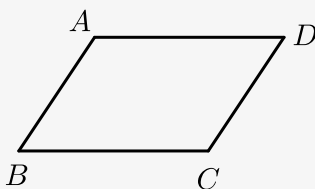
$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B : \angle C = 1 : 2,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ.$$

故选 B.

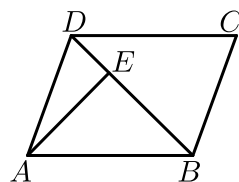


【标注】 【知识点】 根据平行四边形角的性质计算与证明

【重点强调】

2016~2017 学年天津武清区初二下学期期末第 7 题 3 分

2. 如图，在平行四边形  $ABCD$  中， $DB = DC$ ， $\angle C = 70^\circ$ ， $AE \perp BD$  于  $E$ ，则  $\angle DAE =$  \_\_\_\_\_ 度。



【答案】 20

【解析】  $\because DB = DC$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，

$$\therefore \angle DBC = \angle C = 70^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC, AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC = \angle C = 70^\circ, \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ.$$

【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

【重点强调】

2016~2017学年天津东丽区初二下学期期末第3题3分

练习

3. 已知平行四边形 $ABCD$ 中,  $\angle A + \angle C = 240^\circ$ , 则 $\angle B$ 的度数是( ) .

A.  $100^\circ$

B.  $160^\circ$

C.  $80^\circ$

D.  $60^\circ$

【答案】 D

【解析】  $\because$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C, \angle A + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle A + \angle C = 240^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C = 120^\circ,$$

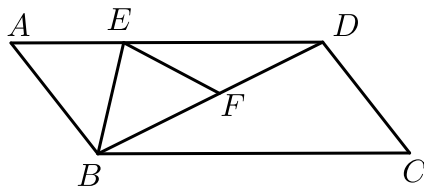
$$\therefore \angle B = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】根据平行四边形角的性质计算与证明

【重点强调】

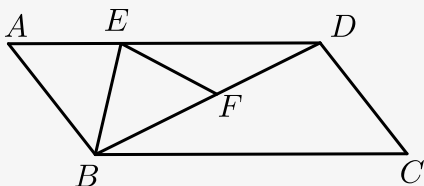
2016~2017学年天津东丽区初二下学期期末第3题3分

4.  $E$ 为平行四边形 $ABCD$ 的边 $AD$ 上一点, 将 $\triangle ABE$ 沿 $BE$ 翻折得到 $\triangle FBE$ , 点 $F$ 在 $BD$ 上, 且 $EF = DF$ . 若 $\angle C = 52^\circ$ , 那么 $\angle ABE =$  \_\_\_\_\_ .



【答案】  $51^\circ$

【解析】



$$\because \angle C = 52^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BFE = 52^\circ,$$

$$\begin{aligned} \because EF = DF, \therefore \angle ADB = 26^\circ, \\ \therefore \angle ABD = 180^\circ - 52^\circ - 26^\circ = 102^\circ, \\ \therefore \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABD = 51^\circ. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

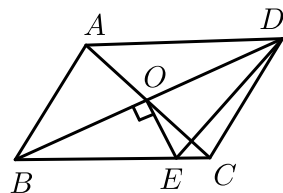
【重点强调】

利用翻折前后对应角相等

2018~2019学年3月天津和平区天津市益中学校初二下学期月考第16题4分

|| 例题

5. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 $O$ ，且 $AB \neq AD$ ，过点 $O$ 作 $OE \perp BD$ 交 $BC$ 于点 $E$ ，若 $\triangle CDE$ 的周长为5，则平行四边形 $ABCD$ 的周长为（ ）.



A. 7

B. 8

C. 10

D. 9

【答案】C

【解析】 $\because$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, BC = AD, OB = OD,$$

$$\because OE \perp BD,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$$\because \triangle CDE \text{ 的周长为 } 5,$$

$$\therefore DE + CE + CD = BE + CE + CD = BC + CD = 5,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 周长} = 2(BC + CD) = 2 \times 5 = 10.$$

故选C.

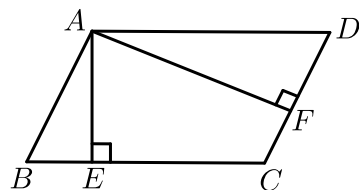
【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

【重点强调】

2018~2019学年3月天津河西区天津市培杰中学初二下学期月考第8题3分

6.

如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 $E$ ， $AF \perp CD$ 于点 $F$ ，若 $AE = 4$ ， $AF = 6$ ， $AD + CD = 20$ ，则平行四边形 $ABCD$ 的面积为 \_\_\_\_\_ 。



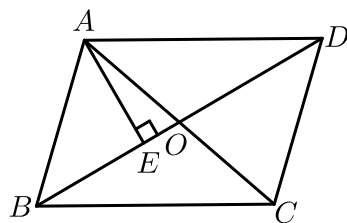
**【答案】** 48

**【解析】** 设 $BC = AD = x$ ，则 $CD = 20 - x$ ，  
根据“等面积法”得 $4x = 6(20 - x)$ ，解得 $x = 12$ ，  
 $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积 $= 4x = 4 \times 12 = 48$ 。  
故答案为：48。

**【标注】** 【知识点】平行四边形的周长与面积

## 练习

7. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BD$ ， $\angle EAD = 60^\circ$ ， $AE = 2\text{cm}$ ， $AC + BD = 16\text{cm}$ ，则 $\triangle OBC$ 的周长是 \_\_\_\_\_ cm。



**【答案】** 12

**【解析】**  $\because$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形，  
 $\therefore AD = CB$ ，  
 $AO = CO = \frac{1}{2}AC$ ，  
 $DO = BO = \frac{1}{2}BD$ ，  
 $\because AC + BD = 16\text{cm}$ ，  
 $\therefore BO + CO = 8\text{cm}$ ，  
 $\because AE \perp BD$ ，  
 $\therefore \angle AED = 90^\circ$ ，

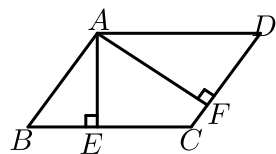
$$\begin{aligned}
&\therefore \angle EAD = 60^\circ, \\
&\therefore \angle ADE = 30^\circ, \\
&\therefore AE = 2\text{cm}, \\
&\therefore AD = 2AE = 4\text{cm}, \\
&\therefore BC = 4\text{cm}, \\
&\therefore C_{\triangle OBC} = 12\text{cm}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

【重点强调】

2017~2018学年4月天津南开区南开大学附属中学初二下学期月考第15题

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ ，垂足为 $E$ ， $AF \perp CD$ ，垂足为 $F$ ，若 $AE : AF = 2 : 3$ ，平行四边形 $ABCD$ 的周长为40，则 $AB$ 的长为（ ）。



- A. 8                      B. 9                      C. 12                      D. 15

【答案】A

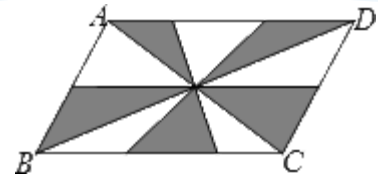
【解析】由平行四边形的面积可知： $BC \cdot AE = CD \cdot AF$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore AE : AF = 2 : 3, \\
&\therefore BC : CD = 3 : 2, \\
&\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的周长为 } 40, \\
&\therefore BC + CD = 20, \\
&\therefore AB = CD = \frac{2}{5} \times 20 = 8, \\
&\text{故选 A.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

|| 例题

9. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AC$ 、 $BD$ 为对角线， $BC = 6$ ， $BC$ 边上的高为4，则阴影部分的面积为（ ）。



A. 3

B. 6

C. 12

D. 24

**【答案】** C

**【解析】**  $\because$  平行四边形是中心对称图形，  
 $\therefore$  阴影的面积是平行四边形面积的一半．

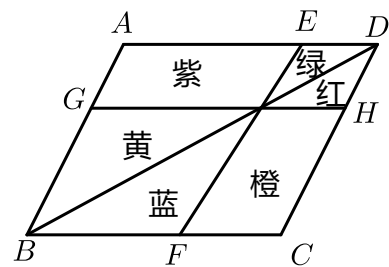
**【标注】** 【知识点】 中心对称等分平行四边形面积

**【重点强调】**

2017~2018学年天津红桥区初二下学期期中第7题3分

### 练习

10. 国家级历史文化名城——金华，风光秀丽，花木葱茏．某广场上一个形状是平行四边形的花坛（如图示），分别种有红、黄、蓝、绿、橙、紫6种颜色的花．如果有  $AB \parallel EF \parallel DC$ ，  
 $BC \parallel GH \parallel AD$ ，那么下列说法错误的是（ ）．



A. 红花、绿花种植面积一定相等

B. 紫花、橙花种植面积一定相等

C. 红花、蓝花种植面积一定相等

D. 蓝花、黄花种植面积一定相等

**【答案】** C

**【解析】**  $\because AB \parallel EF \parallel DC$ ， $BC \parallel GH \parallel AD$ ，  
 $\therefore GH$ 、 $BD$ 、 $EF$  把一个平行四边形分割成四个小平行四边形，  
 $\therefore$  一条对角线可以把一个平行四边形的面积一分为二，  
得  $S_{\text{黄}} = S_{\text{蓝}}$ ，（故D正确）  
 $S_{\text{绿}} = S_{\text{红}}$ ，（故A正确）  
 $S_{(\text{紫}+\text{黄}+\text{绿})} = S_{(\text{橙}+\text{红}+\text{蓝})}$ ，

根据等量相减原理知 $S_{\text{紫}} = S_{\text{橙}}$ ，（故B正确）

$S_{\text{红}}$ 与 $S_{\text{蓝}}$ 显然不相等。（故C错误）

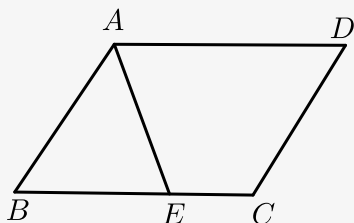
【标注】【知识点】平行四边形的对称性

### 例题

11. 平行四边形的一个内角平分线将该平行四边形的一边分为2cm和3cm两部分，则该平行四边形的周长为\_\_\_\_\_。

【答案】14cm或16cm

【解析】如图，



∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴  $AD \parallel BC$ ，

∴  $\angle DAE = \angle AEB$ ，

∵  $AE$ 为 $\angle BAD$ 平分线，

∴  $\angle DAE = \angle BAE$ ，

∴  $\angle AEB = \angle BAE$ ，

∴  $AB = BE$ ，

① 当 $AB = BE = 2\text{cm}$ ， $CE = 3\text{cm}$ 时，

则周长为14cm。

② 当 $AB = BE = 3\text{cm}$ 时， $CE = 2\text{cm}$ 时，

则周长为16cm。

【标注】【知识点】平行四边形与角平分线结合

### 【重点强调】

注意分类讨论

2017~2018学年天津河西区天津市第四中学初二下学期单元测试《平行四边形和矩形》第10题

### 练习

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中,  $AD = 8$ ,  $AE$ 平分 $\angle BAD$ 交 $BC$ 于点 $E$ ,  $DF$ 平分 $\angle ADC$ 交 $BC$ 于点 $F$ , 且 $EF = 2$ , 则 $AB$ 的长为( ).

A. 3

B. 5

C. 2或3

D. 3或5

【答案】D

【解析】①如图1, 在平行四边形 $ABCD$ 中,

$$\because BC = AD = 8, BC \parallel AD,$$

$$CD = AB, CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB,$$

$$\angle ADF = \angle DFC,$$

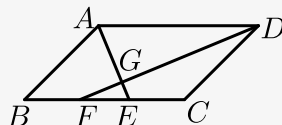


图 1

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD \text{ 交 } BC \text{ 于点 } E, DF \text{ 平分 } \angle ADC \text{ 交 } BC \text{ 于点 } F,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE, \angle ADF = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB, \angle CFD = \angle CDF,$$

$$\therefore AB = BE, CF = CD,$$

$$\because EF = 2,$$

$$\therefore BC = BE + CF - EF = 2AB - EF = 8,$$

$$\therefore AB = 5;$$

②在平行四边形 $ABCD$ 中,

$$\because BC = AD = 8, BC \parallel AD$$

$$, CD = AB, CD \parallel AB,$$

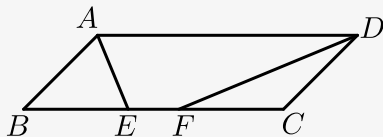


图 2

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB,$$

$$\angle ADF = \angle DFC,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD \text{ 交 } BC \text{ 于点 } E, DF \text{ 平分 } \angle ADC \text{ 交 } BC \text{ 于点 } F,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE, \angle ADF = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB, \angle CFD = \angle CDF,$$

$$\therefore AB = BE, CF = CD,$$

$$\because EF = 2,$$

$$\therefore BC = BE + EF + CF = 2AB + EF = 8,$$

$$\therefore AB = 3.$$

综上所述: $AB$ 的长为3或5.

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

## 例题

13. 平面直角坐标系中，已知四边形 $ABCD$ 的三个顶点坐标分别是 $A(-1, 0)$ ， $B\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ ， $C(a, 0)$ ，要使四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则满足条件的 $D$ 点的坐标为 \_\_\_\_\_。

**【答案】**  $\left(a-1, \frac{5}{2}\right)$

**【解析】** 略。

**【标注】**【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

## 【重点强调】

在平面直角坐标系中利用平行四边形的性质，求点的坐标，可以利用中点坐标公式

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$  求解。

## 练习

14. 若平行四边形的三个顶点的坐标分别为 $O(0, 0)$ 、 $A(2, 0)$ 、 $B(1, 1)$ ，则第四个顶点 $C$ 的坐标为 \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_。

**【答案】**  $(3, 1)$ ； $(-1, 1)$ ； $(1, -1)$

**【解析】** 当 $BC \parallel OA$ ， $BC = OA$ 时， $C$ 和 $B$ 的纵坐标相等，

若选择 $AB$ 为对角线，则 $C_1(3, 1)$ ；

若选择 $OB$ 为对角线，则 $C_2(-1, 1)$ ；

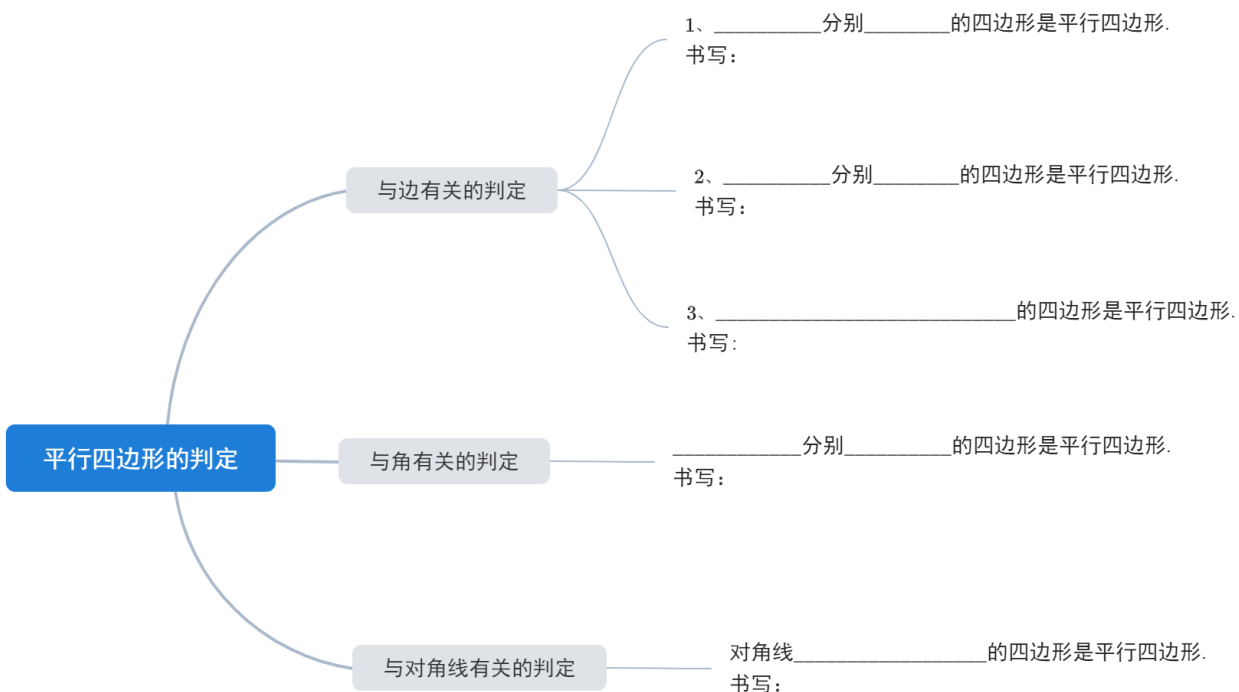
当 $AB \parallel OC$ ， $AB = OC$ 时，

选择 $OA$ 为对角线，则 $C_3(1, -1)$ 。

故第四个顶点坐标是： $C_1(3, 1)$ ， $C_2(-1, 1)$ ， $C_3(1, -1)$ 。

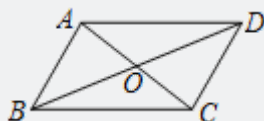
**【标注】**【知识点】平行四边形的性质

## 二、平行四边形的判定



### 【教法备注】

平行四边形 $ABCD$



#### 1、与边有关的判定：

(1) 两组对边分别平行的四边形是平行四边形 .

书写： $\because AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

(2) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形 .

书写： $\because AB = CD, AD = BC,$

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

(3) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形 .

书写： $\because AB \parallel CD, AB = CD,$

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

**注意：**一组对边平行，另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形，可能是等腰梯形 .

#### 2、与角有关的判定：

两组对角分别相等的四边形是平行四边形 .

**注意：**

一组对边平行，一组对角相等的四边形是平行四边形 .

如图： $AB \parallel CD$ ， $\angle B = \angle D$ ，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形．

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$ ．

$\because \angle B = \angle D$ ，

$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ．

由定义可知，四边形 $ABCD$ 为平行四边形．

### 3、与对角线有关的判定：

对角线互相平分的四边形是平行四边形．

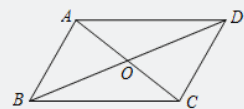
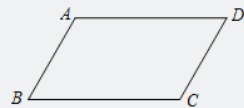
书写： $\because OA = OC$ ， $OB = OD$ ，

$\therefore$  四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

总结：

平行四边形知识的运用包括三个方面：

- ①直接运用平行四边形的性质求角的度数或线段的长度，证明角相等或互补，证明线段相等或倍分等．
- ②先判定一个四边形是平行四边形，从而判定直线平行等．
- ③先判定一个四边形是平行四边形，然后运用平行四边形的性质解决某些问题．



### || 例题

15. 四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 、 $BD$ 相交于点 $O$ ，给出下列四组条件：

- ①  $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ．
- ②  $AB = CD$ ， $AD = BC$ ．
- ③  $AO = CO$ ， $BO = DO$ ．
- ④  $AB \parallel CD$ ， $AD = BC$ ．

其中一定能判定这个四边形是平行四边形的条件有（ ）．

- A. 4组                      B. 3组                      C. 2组                      D. 1组

【答案】 B

【解析】 ①两组对边分别平行的四边形是平行四边形．

②两组对边分别相等的四边形是平行四边形．

③对角线互相平分的四边形是平行四边形．

④一组对边平行且相等的四边形是平行四边形．

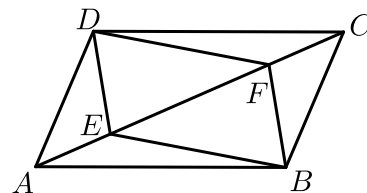
故给出四组条件中，①②③能判断这个四边形是平行四边形，条件④组成的四边形也可能是等腰梯形．

【标注】【知识点】平行四边形的判定-与对角线有关

【重点强调】

2018~2019学年3月天津南开区天津市南开中学初二下学期月考第5题3分

16. 如图，点 $E, F$ 是平行四边形 $ABCD$ 对角线上两点，在条件① $DE = BF$ ；② $\angle ADE = \angle CBF$ ；③ $AF = CE$ ；④ $\angle AEB = \angle CFD$ 中，要使四边形 $DEBF$ 是平行四边形，可添加的条件是（ ）。



- A. ①②③      B. ①②④      C. ①③④      D. ②③④

【答案】D

【解析】由平行四边形的判定方法可知：若四边形的对角线互相平分，可证明这个四边形是平行四边形，①不能证明对角线互相平分，只有②③④可以。

【标注】【知识点】平行四边形的判定及应用

【能力】推理论证能力

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区天津市第四中学初二下学期单元测试《平行四边形和矩形》第6题

### || 练习

17. 下列四个说法:

- ①一组对角相等，一组邻角互补的四边形是平行四边形
- ②一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形
- ③一组对边平行，一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形
- ④一组对边相等，一组对角相等的四边形是平行四边形

其中说法正确的个数是（ ）。

- A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

【答案】B

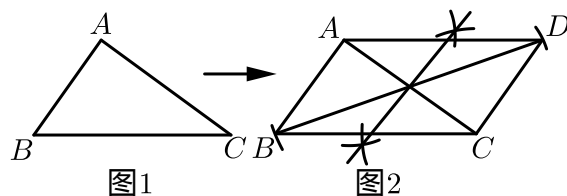
**【解析】** ①一组对角相等，一组邻角互补，可得到任意两对邻角互补，那么可得到两组对边分别平行，为平行四边形，此选项正确；  
 ②一组对边平行，另一组对边相等的四边形不是平行四边形，此选项错误；  
 ③由一组对边平行，一组对角相等可得另一组对边也平行，所以是平行四边形，此选项正确；  
 ④一组对边相等，一组对角相等的四边形不能证明另一组对边也相等或平行，所以该四边形不一定是平行四边形，故本选项错误．  
 所以①③正确．

**【标注】**【知识点】平行四边形的判定-与角有关

**【重点强调】**

2017~2018学年3月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第7题3分

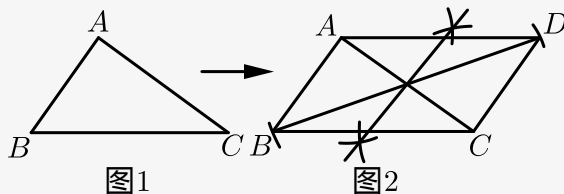
18. 已知 $\triangle ABC$  (如图1)，按图2所示的尺规作图痕迹不需借助三角形全等就能推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的依据是 ( ) ．



- A. 两组对边分别平行的四边形是平行四边形      B. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形  
 C. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形      D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

**【答案】** D

**【解析】** 由图可知先作 $AC$ 的垂直平分线，再连接 $AC$ 的中点 $O$ 与 $B$ 点，并延长使 $BO = OD$ ，

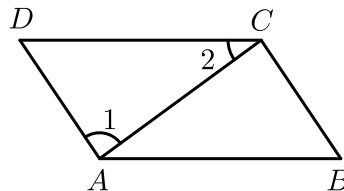


可得： $AO = OC$ ， $BO = OD$ ，  
 进而得出四边形 $ABCD$ 是平行四边形，  
 故选D．

**【标注】**【知识点】平行四边形的判定-与对角线有关

例题

19. 如图，四边形 $ABCD$ ， $AB \parallel DC$ ， $\angle B = 55^\circ$ ， $\angle 1 = 85^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ 。



(1) 求 $\angle D$ 的度数。

(2) 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

**【答案】** (1)  $55^\circ$ 。

(2) 证明见解析。

**【解析】** (1) 在 $\triangle ADC$ 中， $\angle 1 = 85^\circ$ ， $\angle 2 = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle D = 55^\circ.$$

(2)  $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle D + \angle DAB = 180^\circ.$$

$$\because \angle D = \angle B,$$

$$\therefore \angle B + \angle DAB = 180^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC.$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \text{四边形} ABCD \text{是平行四边形}.$$

**【标注】**【能力】运算能力

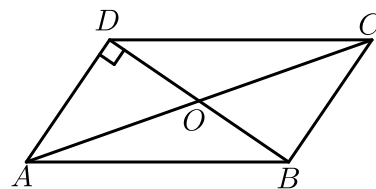
【能力】推理论证能力

【知识点】平行线的性质

【知识点】平行四边形的判定及应用

【知识点】平行四边形的性质及应用

20. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = 12$ ， $DO = OB = 5$ ， $AC = 26$ ， $\angle ADB = 90^\circ$ 。



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

(2) 求  $D$  点到  $AB$  的距离 .

【答案】(1) 证明见解析 .

$$(2) \frac{60\sqrt{61}}{61} .$$

【解析】(1)  $\because$  在  $\text{Rt}\triangle OAD$  中 ,

$$AD = 12, DO = OB = 5, \angle ADB = 90^\circ ,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AD^2 + OD^2} = 13 .$$

$$\therefore AC = 26 ,$$

$$OA = OC = 13 ,$$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  为平行四边形 .

(2) 设  $D$  点到  $AB$  的距离为  $h$  ,

$\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中 ,

$$AD = 12, DO = OB = 5, \angle ADB = 90^\circ ,$$

$$\therefore BD = OB + OD = 10 ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{61} .$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形}ABCD} = AB \cdot h = AD \cdot BD ,$$

$$\therefore h = \frac{AD \cdot BD}{AB} = \frac{60\sqrt{61}}{61} .$$

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

【知识点】平行四边形的判定及应用

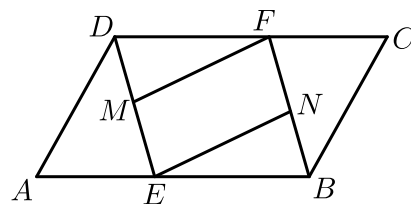
【能力】推理论证能力

【重点强调】

2018~2019 学年天津河西区初二下学期期中 (第二学片) 第21题8分

练习

21. 如图所示, 平行四边形  $ABCD$  中,  $E$ 、 $F$  分别是  $AB$ 、 $CD$  上的点,  $AE = CF$ ,  $M$ 、 $N$  分别是  $DE$ 、 $BF$  的中点. 求证: 四边形  $ENFM$  是平行四边形 .



【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形 ,

$$\therefore AD = BC, \angle A = \angle C .$$

$$\text{又} \because AE = CF ,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBF (\text{SAS}) .$$

$$\therefore \angle AED = \angle CFB, DE = BF .$$

由四边形  $ABCD$  是平行四边形 ,

$$\therefore DC \parallel AB .$$

$$\therefore \angle CFB = \angle ABF .$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABF .$$

$$\therefore ME \parallel FN .$$

又  $\because M、N$  分别是  $DE、BF$  的中点 , 且  $DE = BF$  ,

$$\therefore ME = FN .$$

$\therefore$  四边形  $ENFM$  是平行四边形 .

【标注】【知识点】平行四边形的性质及应用

【知识点】平行四边形的判定及应用

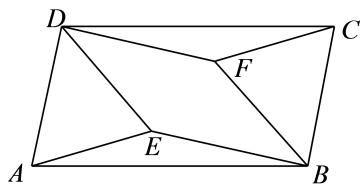
【知识点】SAS

【能力】推理论证能力

【重点强调】

2018~2019 学年 3 月天津红桥区天津市方舟中学初二下学期月考第 18 题 8 分

22. 在平行四边形  $ABCD$  中 , 分别以  $AD、BC$  为边向内作等边  $\triangle ADE$  和等边  $\triangle BCF$  , 连接  $BE、DF$  . 求证 : 四边形  $BEDF$  是平行四边形 .



【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形 ,

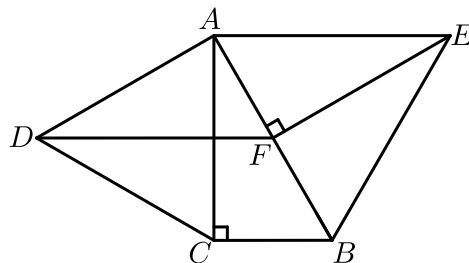
$$\therefore \angle DCB = \angle BAD, CD = AB, BC = AD ,$$

又  $\because \triangle ADE$  和  $\triangle BCF$  为等边三角形 ,

$\therefore BC = CF = BF = DE = AE$  ,  $\angle FCB = \angle EAD$  ,  
 则  $CF = AE$  ,  $\angle FCD = \angle EAB$  ,  
 $\therefore \angle DCB = \angle BAD$  ,  $\angle FCB = \angle EAD$  ,  
 $\therefore \angle DCB - \angle FCB = \angle BAD - \angle EAD$  ,  
 即  $\angle DCF = \angle BAE$  ,  
 可证  $\triangle CFD \cong \triangle AEB$  (SAS) ,  
 $\therefore FD = EB$  ,  
 又  $\therefore BC = CF = BF = DE = DA = AE$  ,  
 $\therefore BF = DE$  ,  
 则四边形  $BEDF$  是平行四边形 .

**【标注】**【知识点】平行四边形与全等综合

23. 如图，分别以  $\text{Rt}\triangle ABC$  的直角边  $AC$  及斜边  $AB$  为边向外作等边  $\triangle ACD$ 、等边  $\triangle ABE$  . 已知  $\angle BAC = 30^\circ$  ,  $EF \perp AB$  , 垂足为  $F$  , 连接  $DF$  .



- ( 1 ) 求证 :  $AC = EF$  .  
 ( 2 ) 求证 : 四边形  $ADFE$  是平行四边形 .

**【答案】** ( 1 ) 证明见解析 .

( 2 ) 证明见解析 .

**【解析】** ( 1 )  $\because \triangle ABC$  是直角三角形 ,  $\angle ACB = 90^\circ$  ,  $\angle BAC = 30^\circ$  ,

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AB ,$$

又  $\triangle ABE$  是等边三角形 ,  $EF \perp AB$  ,

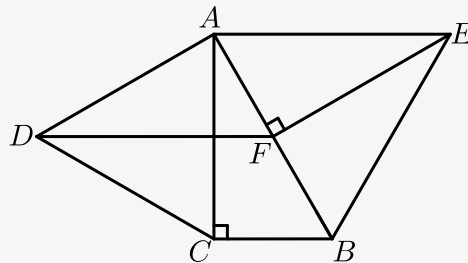
$$\therefore AF = \frac{1}{2}AB ,$$

$$\therefore AF = BC ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle AFE , \text{ 又}$$

$$\angle EAB = \angle ABC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle ECB$$



$$\therefore AC = EF.$$

(2) 由(1)知  $EF = AC$  , 又  $\triangle ACD$  是等边三角形

$$\therefore AC = AD$$

$$\therefore EF = AD$$

$$\text{又 } \angle BAC = 30^\circ, \angle CAD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, \text{ 即 } AB \perp AD,$$

$$\text{又 } EF \perp AB, \therefore EF \parallel AD,$$

$\therefore$  四边形  $ADFE$  是平行四边形 .

【标注】【知识点】平行四边形的判定及应用

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】AAS

【知识点】等边三角形的性质

【能力】推理论证能力

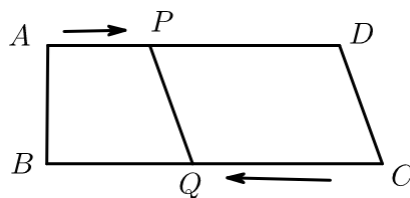
### 【重点强调】

2018~2019学年3月天津和平区天津市第二南开中学初二下学期月考第24题10分

### 例题

### 平行四边形动点问题

24. 如图, 在直角梯形  $ABCD$  中,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AD = 16\text{cm}$ ,  $BC = 20\text{cm}$ , 点  $P$  从  $A$  出发, 以  $1\text{cm/s}$  的速度向  $D$  运动, 点  $Q$  从  $C$  同时出发, 以  $3\text{cm/s}$  的速度向  $B$  运动, 当一个点运动到端点时, 另一个也随之停止运动, 当  $t = \underline{\hspace{2cm}}$  秒时,  $PQCD$  为平行四边形 .



【答案】4

【解析】由题意:  $AP = t\text{cm}$ ,  $CQ = 3t\text{cm}$ ,

$$\therefore PD = 16 - t,$$

$\therefore$  四边形  $PQCD$  为平行四边形,

$$\therefore PD = CQ,$$

$$\therefore 16 - t = 3t,$$

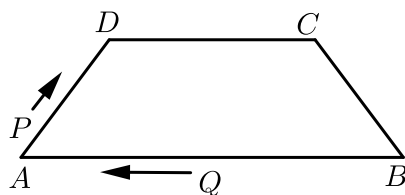
$$\therefore t = 4.$$

故答案为：4.

【标注】【知识点】动点与平行四边形问题

## 练习

25. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AD = BC = 5$ ， $DC = 7$ ， $AB = 13$ ，点 $P$ 从点 $A$ 出发以3个单位/s的速度沿 $AD \rightarrow DC$ 向终点 $C$ 运动，同时点 $Q$ 从点 $B$ 出发，以1个单位/s的速度沿 $BA$ 向终点 $A$ 运动，当四边形 $PQBC$ 为平行四边形时，运动时间为（ ）.



A. 4s

B. 3s

C. 2s

D. 1s

【答案】B

【标注】【知识点】平行四边形的判定及应用

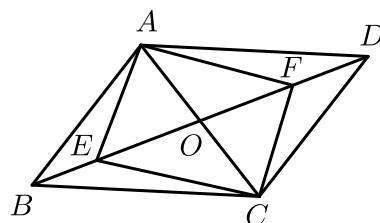
【思想】数形结合思想

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

## 独步天下

26. 如图， $E$ ， $F$ 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 $BD$ 上的两点，在下列条件：① $\angle BAE = \angle DCF$ ，② $BE = DF$ ，③ $AE = CF$ ，④ $AF = CE$ ，⑤ $\angle DAF = \angle BCE$ ，⑥ $AF \parallel CE$ ，⑦ $AE \perp BD$ ， $CF \perp BD$ ，请你添加一个适当的条件，使四边形 $AECF$ 是平行四边形，则可添加的条件有（ ）个.



A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】B

【解析】根据平行四边形的判定，对边平行且相等的四边形为平行四边形，

①加 $\angle BAE = \angle DCF$ ，可证得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，

可得 $AE \parallel CF$ ，且 $AE = CF$ ，可以证明四边形 $AECF$ 是平行四边形；

② $BE = DF$ ，可得 $OE = OF$ ， $OA = OC$ ，即可判定四边形 $AECF$ 是平行四边形；

③ $AE = CF$ ，无法判定 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，则无法判定四边形 $AECF$ 是平行四边形；

④ $AF = CE$ ，也无法判定四边形 $AECF$ 是平行四边形；

⑤ $\angle DAF = \angle BCE$ ，可得 $\triangle ADF \cong \triangle CBE$ ，继而可得 $AF = CE$ ， $AF \parallel CE$ ，可以证明四边形 $AECF$ 是平行四边形；

⑥ $AF \parallel CE$ ，可得 $\triangle ADF \cong \triangle CBE$ ，继而可得 $AF = CE$ ，可以证明四边形 $AECF$ 是平行四边形；

⑦ $AE \perp BD$ ， $CF \perp BD$ ，可证得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，可得 $AE \parallel CF$ ，且 $AE = CF$ ，可以证明四边形 $AECF$ 是平行四边形；

$\therefore$ 可添加的条件有5个．

故选B．

【标注】【能力】推理论证能力

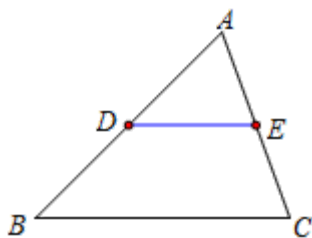
【知识点】平行四边形与全等综合

【知识点】平行四边形的判定及应用

【重点强调】

2018~2019学年3月天津南开区天津市第二十五中学初二下学期月考第5题3分

### 三、 三角形中位线



## 三角形中位线

中位线定义：连接三角形两边\_\_\_\_\_的线段叫做三角形的中位线.

中位线定理：三角形的中位线\_\_\_\_\_于三角形的第三边，并且等于第三边的\_\_\_\_\_。  
书写：

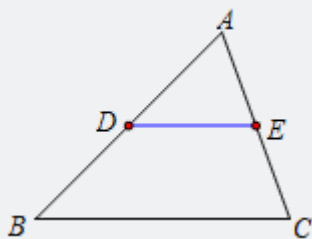
### 【教法备注】

#### 1、三角形中位线定义：

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。

#### 2、三角形中位线定理：

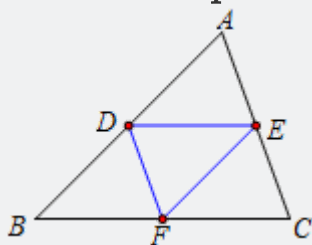
三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半。



如上图， $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

#### 拓展：

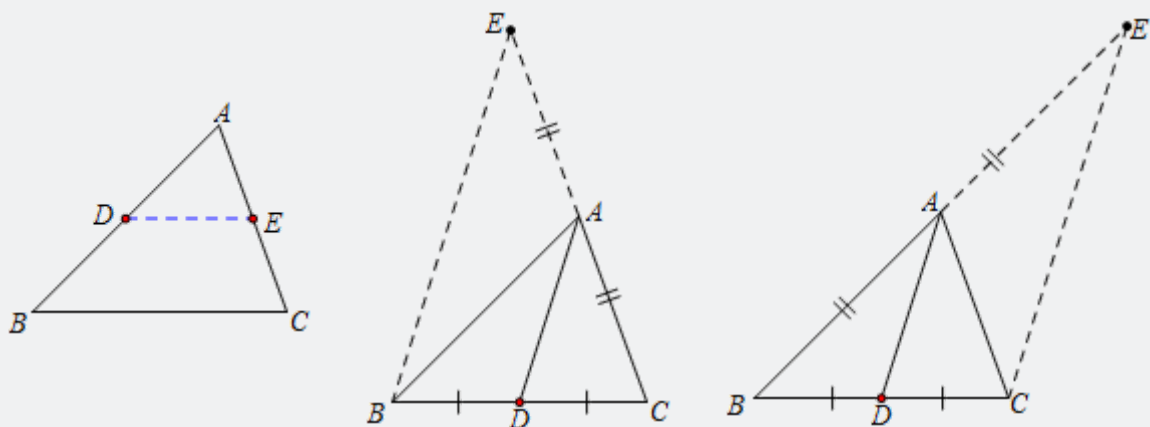
三角形有三条中位线，三条中位线把原三角形分成可重合的4个小三角形，每个小三角形的周长为原三角形周长的 $\frac{1}{2}$ ，每个小三角形的面积为原三角形面积的 $\frac{1}{4}$ 。



#### 总结：

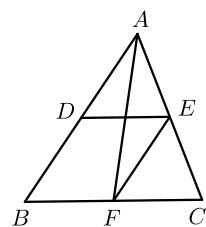
①三角形的中位线与第三边都有相应的位置关系和数量关系，位置关系可以证明两条直线平行，数量关系可以证明线段的倍分关系。

②当已知条件中的中点较多，要联想“三角形的中位线”，不是中位线的，可以通过辅助线构造。



### || 例题

27. 如图,  $\triangle ABC$ 中,  $D$ 、 $E$ 、 $F$ 分别是 $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$ 的中点. 若 $EF = 5\text{cm}$ , 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$ ;  
若 $BC = 9\text{cm}$ , 则 $DE = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$ .



**【答案】** 10 ; 4.5

**【解析】**  $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 点 $E$ 、 $F$ 分别是 $AC$ 、 $BC$ 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore EF \parallel AB$ 且 $EF = \frac{1}{2}AB$ .

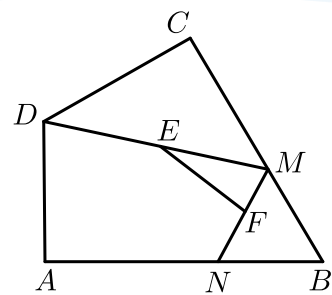
又 $EF = 5\text{cm}$ ,

$\therefore AB = 10\text{cm}$ .

同理,  $DE = \frac{1}{2}BC = 4.5\text{cm}$ .

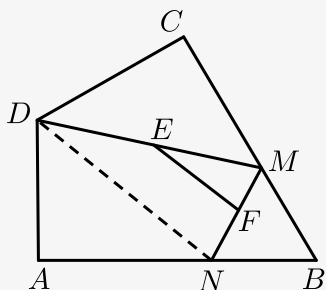
**【标注】**【知识点】中位线定理及其应用

28. 如图, 四边形 $ABCD$ 中,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 2\sqrt{5}$ ,  $AD = 2$ , 点 $M$ ,  $N$ 分别为线段 $BC$ ,  $AB$ 上的动点 (含端点, 但点 $M$ 不与点 $B$ 重合), 点 $E$ ,  $F$ 分别是 $DM$ ,  $MN$ 的中点, 则 $EF$ 长度的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



【答案】  $\sqrt{6}$

【解析】 如图，连接  $DN$ ，



$$\because DE = EM, FN = FM,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DN,$$

当点  $N$  与点  $B$  重合时， $DN$  的值最大即  $EF$  最大，

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中，

$$\because \angle A = 90^\circ, AD = 2, AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore EF \text{ 的最大值} = \frac{1}{2}BD = \sqrt{6}.$$

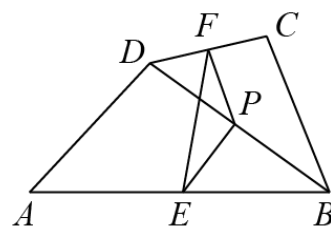
【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

【重点强调】

2017~2018 学年天津河西区天津市第四中学初二下学期单元测试《平行四边形和矩形》第 17 题

29. 如图，在四边形  $ABCD$  中，点  $P$  是对角线  $BD$  的中点，点  $E$ 、 $F$  分别是  $AB$ 、 $CD$  的中点，

$AD = BC$ ， $\angle PEF = 30^\circ$ ，则  $\angle PFE$  为 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $30^\circ$

【解析】  $\because$  在四边形  $ABCD$  中,  $P$  是对角线  $BD$  的中点,  $E, F$  分别是  $AB, CD$  的中点,

$\therefore PF, PE$  分别是  $\triangle CDB$  与  $\triangle DAB$  的中位线,

$$\therefore PF = \frac{1}{2}BC, PE = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\therefore PF = PE,$$

故  $\triangle EPF$  是等腰三角形.

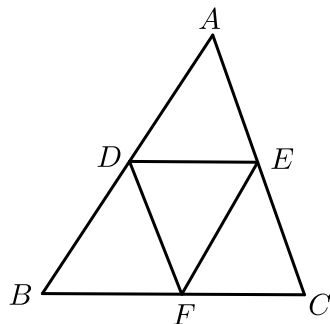
$$\therefore \angle PEF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle PFE = 30^\circ.$$

【标注】 【知识点】 三角形中位线定理

### 练习

30. 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D, E, F$  分别是  $AB, AC, BC$  的中点, 若  $\triangle ABC$  的周长为  $12\text{cm}$ , 则  $\triangle DEF$  的周长是 \_\_\_\_\_  $\text{cm}$ .



【答案】 6

【解析】  $\because D, E, F$  是  $AB, AC, BC$  中点,

$\therefore DE, DF, EF$  为  $\triangle ABC$  的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}AC, EF = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AB + BC + AC = 12\text{cm},$$

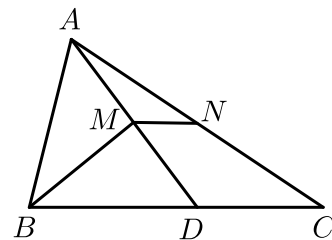
$$\therefore DE + DF + EF = 6\text{cm}.$$

故答案为: 6.

【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

【重点强调】

31. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 $D$ 在 $BC$ 上， $BD = AB$ ， $BM \perp AD$ 于点 $M$ ， $N$ 是 $AC$ 的中点，连接 $MN$ ，若 $AB = 5$ ， $BC = 8$ ，则 $MN$ 的长为（ ）。



- A. 6                      B. 3                      C. 1.5                      D. 1

**【答案】** C

**【解析】**  $\because BD = AB$ ， $BM \perp AD$ 于点 $M$ ，

$$\therefore AM = DM.$$

$\because N$ 是 $AC$ 的中点，

$$\therefore AN = CN.$$

$\therefore MN$ 是三角形 $ADC$ 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}DC.$$

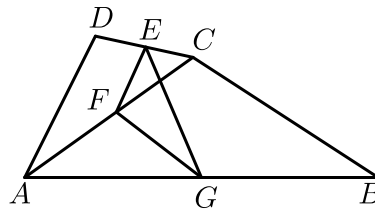
$$\because AB = 5, BC = 8,$$

$$\therefore DC = 3.$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}DC = 1.5.$$

**【标注】**【知识点】中位线定理及其应用

32. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 分别为 $DC$ 、 $AC$ 、 $AB$ 的中点，且有 $\angle DAB + \angle B = 90^\circ$ ， $AD = 6$ ， $BC = 8$ ，则 $EG =$ \_\_\_\_\_。



**【答案】** 5

**【解析】**  $\because \angle DAB + \angle B = 90^\circ$ ， $EF$ 是 $\triangle CAD$ 的中位线， $FG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $AD = 6$ ， $BC = 8$ ，

∴

$$\angle EFG = \angle EFC + \angle CFG = \angle DAC + \angle CAB + \angle AGF = \angle DAC + \angle CAB + \angle B = 90^\circ$$

$$, EF = 3, FG = 4,$$

∴  $\triangle EFG$  是一个直角三角形,

$$\therefore EG = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

故答案为: 5.

**【标注】**【知识点】中位线定理及其应用